

Concursul de matematică aplicată Adolf Haimovici
Etapă locală, 21 februarie 2016
Profil real, științele naturii
Barem de corectare clasa a IX-a

1. a) Arătați că $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2), \forall x, y \geq 0$

b) Fie $x, y, z > 0$ astfel încât $xyz = 1$. Demonstrați că:

$$\frac{x^2+y^2}{x+y} + \frac{y^2+z^2}{y+z} + \frac{z^2+x^2}{z+y} \geq \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}$$

Soluție:

a) Evident

(2p)

b)

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} \geq \frac{\frac{(x + y)^2}{2}}{x + y} = \frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy} = \frac{1}{\sqrt{z}}$$

$$\frac{y^2 + z^2}{y + z} \geq \frac{\frac{(y + z)^2}{2}}{y + z} = \frac{y + z}{2} \geq \sqrt{yz} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{z^2 + x^2}{z + x} \geq \frac{\frac{(z + x)^2}{2}}{z + x} = \frac{z + x}{2} \geq \sqrt{zx} = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

(+)

$$\frac{x^2+y^2}{x+y} + \frac{y^2+z^2}{y+z} + \frac{z^2+x^2}{z+y} \geq \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \quad (5p)$$

2. Determinați numărul fracțiilor ireductibile, pozitive și subunitare care au proprietatea că suma dintre numărător și numitor este 2015.

Soluție:

Fie $0 < \frac{a}{b} < 1, a, b \in \mathbb{N}^*, a + b = 2015 \Rightarrow 1007$ fracții

(1p)

Determinăm câte fracții sunt reductibile.

$$2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$$

$$\text{Fie } \left. \begin{matrix} d|a \\ d|b \end{matrix} \right\} \Rightarrow d|a+b \Rightarrow d|2015$$

(1p)

Fie A mulțimea fracțiilor care se simplifică cu 5, B mulțimea fracțiilor care se simplifică cu 13 și C mulțimea fracțiilor care se simplifică cu 31.

$$\text{Dacă } A \cap B \cap C \neq \emptyset \Rightarrow d = 2015 \text{ (contradicție)} \Rightarrow A \cap B \cap C = \emptyset$$

$$\text{Dacă } \frac{a}{b} \in A \Rightarrow a = 5x, b = 5y, \quad x, y \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x + y = 403 \Rightarrow |A| = 201$$

$$\text{Dacă } \frac{a}{b} \in B \Rightarrow a = 13x, b = 13y, \quad x, y \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x + y = 155 \Rightarrow |B| = 77$$

$$\text{Dacă } \frac{a}{b} \in C \Rightarrow a = 31x, b = 31y, \quad x, y \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x + y = 65 \Rightarrow |C| = 32$$

$$\text{Dacă } \frac{a}{b} \in A \cap B \Rightarrow a = 5 \cdot 13 \cdot x, b = 5 \cdot 13 \cdot y, \quad x, y \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x + y = 31 \Rightarrow |A \cap B| = 15$$

$$\text{Dacă } \frac{a}{b} \in A \cap C \Rightarrow a = 5 \cdot 31 \cdot x, b = 5 \cdot 31 \cdot y, \quad x, y \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x + y = 13 \Rightarrow |A \cap C| = 6$$

$$\text{Dacă } \frac{a}{b} \in B \cap C \Rightarrow a = 31 \cdot 13 \cdot x, b = 31 \cdot 13 \cdot y, \quad x, y \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x + y = 5 \Rightarrow |B \cap C| = 2$$

(3p)

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| = 287$$

(1p)

Numărul fracțiilor ireductibile este $1007 - 287 = 720$

(1p)

3. Fie un patrulater $ABCD$, $M \in (AD)$, $N \in (BC)$ astfel încât $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC} = k$. Dacă P, Q, R sunt mijloacele segmentelor $[AB]$, $[CD]$ și $[MN]$ atunci:

a) Exprimați vectorii \overrightarrow{PM} și \overrightarrow{PN} în funcție de vectorii \overrightarrow{PA} , \overrightarrow{PC} , \overrightarrow{PD}

b) Arătați că P, Q, R sunt coliniare

Soluție:

$$\text{a) (3p)} \quad k > 0 \Rightarrow \overrightarrow{MA} = -k\overrightarrow{MD}$$

Strada Victoriei nr. 132 – 134

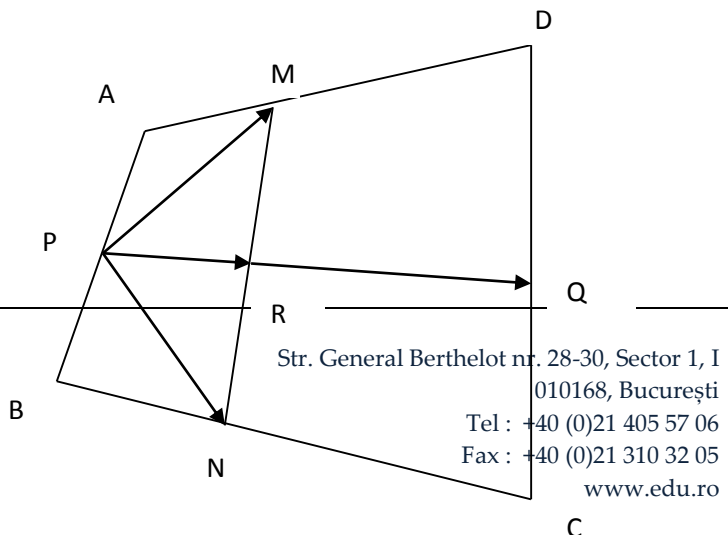
Tg – Jiu, cod 210234

Telefon : 0253-227177

Fax : 0253-224750

<http://isj.gj.edu.ro>, e-mail : isjgorj@yahoo.com,

isjgj@utgjiu.ro



Str. General Berthelot nr. 28-30, Sector 1, I
010168, București
Tel : +40 (0)21 405 57 06
Fax : +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NB} &= -k\overrightarrow{NC} \Rightarrow \\ \overrightarrow{PM} &= \frac{\overrightarrow{PA} + k\overrightarrow{PD}}{k+1} \\ \overrightarrow{PM} &= \frac{\overrightarrow{PB} + k\overrightarrow{PC}}{k+1} = \frac{-\overrightarrow{PA} + k\overrightarrow{PC}}{k+1}\end{aligned}$$

$$b) \quad (4p) \quad \overrightarrow{PR} = \frac{\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}}{2} = \frac{k}{2(k+1)}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{PQ} \Rightarrow P, Q, R \text{ sunt coliniare.}$$

4. Fie $\triangle ABC$, H ortocentrul său, O centrul cercului circumscris triunghiului și A' simetricul punctului A față de O .

a) Demonstrați că $BHCA'$ este paralelogram

b) Demonstrați că pentru orice punct M din planul triunghiului ABC are loc relația:

$$2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MH}$$

$$a) \quad (3p) \quad \left. \begin{array}{l} CH \perp AB \\ A'B \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow A'B \parallel CH$$

$$\left. \begin{array}{l} BH \perp AC \\ A'C \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow A'C \parallel BH$$

$\Rightarrow BHCA'$ paralelogram

$$b) \quad (4p) \text{ Fie } D \text{ mijlocul lui } [BC] \Rightarrow D \text{ mijlocul lui } [A'H] \Rightarrow$$

$$\forall M \in (ABC), \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MA'}$$

$$\text{Dar } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'} = 2\overrightarrow{MO} \Rightarrow \overrightarrow{MA'} = 2\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MA}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MH} + 2\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \Rightarrow 2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MH}$$

